An example of trice for fuzzy theory (Algebras, Languages, Algorithms and Computations)

AUTHOR(S):

堀内, 清光

数理解析研究所講究録
第1769巻 2011年 39-48

An example of trice for fuzzy theory

堀内清光
Kiyomitsu Horiuchi

Faculty of Science and Engineering, Konan University
Okamoto, Higashinada, Kobe 658-8501, Japan
horiuchi@konan-u.ac.jp

二つの半束演算を対称的に備えた代数系として束がある。三つの半束演算を備えて回吸収律を満たした代数系がトリスである。ここでは、トリスの重要な例としてファジィ集合の真理値にトリスを応用する試みを紹介する。これは直観ファジィ集合を表現できる概念である。

1 準備

1.1 Triceの定義

集合 L に対して、2項関係 $\leq$ が次の3法則が成立つとき, $(L, \leq)$ を順序集合(ordered set) という。

$$a \leq a \qquad (reflective) \tag{1}$$
$$a \leq b \text{ and } b \leq a \text{ imply that } a = b \qquad (antisymmetric) \tag{2}$$
$$a \leq b \text{ and } b \leq c \text{ imply that } a \leq c \qquad (transitive) \tag{3}$$

集合 S に対して、半束(semilattice) $(S, *)$ とは、S の上に idempotent, commutative, associative な二項演算 $*$ を持つ代数である。

$$a * a = a \qquad (idempotent) \tag{4}$$
$$a * b = b * a \qquad (commutative) \tag{5}$$
$$a * (b * c) = (a * b) * c \qquad (associative) \tag{6}$$

次の命題は基本的である。

Proposition 1 $(S, *)$ を半束とする. 演算 $*$ から 関係 $\leq_*$ を $a, b \in S$ で

$$a \leq_* b \Longleftrightarrow a * b = b \tag{7}$$

と定義すれば, $(S, \leq_*)$ は順序集合である.

逆に、順序集合から半束を導く場合は、必ず二元の最小上界が存在するという条件が必要である。これが満たされる場合、半束と順序は同じもののように扱う。

n を正の整数とし n 個の二項演算を備えた代数 $(A, *_1, *_2, ..., *_n)$ を考えて、各 $(A, *_i)$ $(i \in \{1, 2, ..., n\})$ が 半束であるとき、n 半束 **(n-semilattice)** と呼ぶ。S_n を 集合 $\{1, 2, ...n\}$ の上の symmetric group とする。すべての $a, b \in A$ すべての $\sigma \in S_n$ に対して、つぎの形の $n!$ 個の関係式

$$((((a *_{\sigma(1)} b) *_{\sigma(2)} b) *_{\sigma(3)} b) ... *_{\sigma(n)} b) = b \tag{8}$$

を **n-回吸収律 (n-roundabout absorption laws)** と呼ぶことにする。
半束演算を 2 つ備えた代数 $(A, *_1, *_2)$ が 2-回吸収律を満たすときが束である。このとき演算 $*_1$ と $*_2$ は $\vee$ と $\wedge$ の記号で表わされる。
半束演算を 3 つ備えた代数 $(A, *_1, *_2, *_3)$ が 3-回収律を満たすとき、トリス **(trice)** と呼ぶことにする。さらに半束演算の数を増やした代数を考えることもできる。

1.2 平面上の直線分割順序 line partition order

$(X, \leq)$ を順序集合とする。$a \in X$ に対して、上界集合 $\{x \in X \mid a \leq x\}$ を $U(a)$、下界集合 $\{x \in X \mid a \leq x\}$ を $L(a)$ と表すとする。R は実数全体として、ここで X が平面 R^2 の場合を考える。

Definition 1 すべての $a \in X$ で $U(a)$ が、点 a を通る 2 本の半直線を境界としている領域である場合、この順序 $\leq$ は上直線分割順序 (upper line partition order) と云うことにする。 境界の 2 本の半直線を $l_{U,a,R}$ と $l_{U,a,L}$ と表すとする。同様に、$L(a)$ が、点 a を通る 2 本の半直線を境界としている領域である場合、この順序 $\leq$ は下直線分割順序 (lower line partition order) と云うことにする。 境界の 2 本の半直線を $l_{L,a,R}$ と $l_{L,a,L}$ と表すとする。 順序 $\leq$ が上直線分割かつ下直線分割のとき**直線分割順序 (line partition order)** と定義する。

ここで、境界線を特定するため、直観的に、$l_{U,a,R}$ は領域 $U(a)$ の右境界であり、点 a からみて $l_{U,a,R}$ の左側に領域 $U(a)$ があるとする。$l_{U,a,L}$ は領域 $U(a)$ の左境界である。$l_{L,a,R}$ は領域 $L(a)$ の右境界であり、$l_{L,a,L}$ は領域 $L(a)$ の左境界である。

Example 1 上直線分割順序で下直線分割でない例
各点の $U(a)$ を与えて順序を構成する。 $a = (a_1, a_2) \in R^2$ に対して、
$a_2 \geq 0$ ならば $U(a) = \{(x, y) \mid y > 2x - 2a_1 + a_2 \text{ and } y > -2x + 2a_1 - a_2\}$
$a_2 < 0$ ならば $U(a) = \{(x, y) \mid y > x - a_1 + a_2 \text{ and } y > -x + a_1 - a_2\}$
とする (上の式の中の不等号は実数の通常の順序)。これによって構成される R^2 の上の順序は、上直線分割であるが下直線分割でない。

Proposition 2 直線分割順序では, すべての $a \in X$ で、$l_{U,a,R}$ と $l_{L,a,R}$ は同一線上にあり、その傾きは一致する。同様に、すべての $a \in X$ で、$l_{U,a,L}$ と $l_{L,a,L}$ は同一線上にあり、その傾きは一致する。
つまり、$a, b \in X$ に対して、$l_{U,a,R} \parallel l_{U,b,R} \parallel l_{L,a,R} \parallel l_{L,b,R}$ ($\parallel$ は平行) である。 同様に、$a, b \in X$ に対して、$l_{U,a,L} \parallel l_{U,b,L} \parallel l_{L,a,L} \parallel l_{L,b,L}$ である。

Proof $l_{U,a,R}$ の上の点を b $(b \neq a)$ とする。$a \leq b$ より、$a \in L(b)$、よって $l_{L,b,R}$ は a より上の方を通過して $l_{U,a,L}$ と交わる。この交点を c とする、$a \leq c$ ($a = c$ の場合も

ある)。
ここで、$l_{U,a,R}$ と $l_{L,b,R}$ の傾きが異なると仮定する ($a \neq c$ とする)。このとき、$c \leq b$ であるから $b \in U(c)$。$l_{U,c,R}$ と $l_{U,a,R}$ は、交わることになるので、その交点を d とする。$l_{U,c,R}$ 上で、点 c と d に関して対称な点を e とする。e が $l_{U,c,R}$ の上の点より $e \in U(c)$ であり $c \leq e$ である。$a \leq c$ より $a \leq e$ となる。一方 e は $l_{U,a,R}$ 右側より $e \notin U(a)$ だから $a \not\leq e$ でなければならない。よって矛盾する。
$l_{U,a,R}$ と $l_{L,b,R}$ の傾きは同である。ここから $l_{U,a,R}$ を含む直線上のすべての点 x に対して $l_{U,x,R}$ と $l_{L,x,R}$ の傾きは同である。
$l_{U,a,R}$ を含む直線上以外の点を y とし $l_{U,y,R}$ の傾きが $l_{U,a,R}$ の傾きと異なると仮定する。$l_{U,a,R}$ を含む直線と $l_{U,y,R}$ を含む直線との交点を p とする。$l_{U,p,R}$ の傾きは $l_{U,a,R}$ の傾きと一致し、$l_{U,y,R}$ の傾きとも一致するから矛盾。
以上から、すべての $a \in X$ の $l_{U,a,R}$ の傾きは一致し、$l_{L,a,R}$ の傾きもこれと一致する。
同様に、すべての $a \in X$ の $l_{U,a,L}$ の傾きは一致し、$l_{L,a,L}$ の傾きもこれと一致する。

直線分割順序で $l_{U,a,R}$ と $l_{U,a,L}$ の傾きが一致する場合は この順序から半束を構成できない。直線分割順序で $l_{U,a,R}$ と $l_{U,a,L}$ の傾きが異なる場合は Proposition 1 の逆方向で必ず二元の最小上界が存在するので 半束を構成する。直線分割順序 $(R^2, \leq)$ から構成した半束を $(R^2, *_{\leq})$ とする。これを部分集合 $X \subset R^2$ に制限した $(X, *_{\leq})$ が部分半束をなすとき、**直線分割半束 (line partition order semilattice)** と呼ぶとする。

1.3 秩序トリス methodical trice

直線分割半束を3つ備えたトリスについて考える。ここでは、X が順序に関して最大元があるときを考える。R^2 に3つの直線分割順序 $\leq_1$, $\leq_2$, $\leq_3$ が入っていて、それぞれ半束演算 $*_1, *_2, *_3$ が構成されているとする。各々の $n \in \{1,2,3\}$ に対して $\{x \in R^2 \mid a \leq_n x\}$ を $U_n(a)$ その境界を $l_{U,a,R,n}$ と $l_{U,a,L,n}$ とし、$\{x \in R^2 \mid a \leq_n x\}$ を $L_n(a)$ その境界を $l_{L,a,R,n}$ と $l_{L,a,L,n}$ とする。
部分集合 $X \subset R^2$ は、$*_1, *_2, *_3$ のすべてに対して直線分割半束をなす領域とする。さらに $\leq_1$, $\leq_2$, $\leq_3$ が、X の中に、それぞれ最大元 t_1, t_2, t_3 を持ち $t_1 \neq t_2 \neq t_3 \neq t_1$ とする。 次のことは容易にわかる。

- $L_1(t_1) \cap L_2(t_2) \cap L_3(t_3) \supset X$
- すべての $a \in X$ に対して $U_1(a) \cup U_2(a) \cup U_3(a) \cup L_1(a) \cup L_2(a) \cup L_3(a) = R^2$
- $m, n \in \{1,2,3\}$ $(m \neq n)$ に対して $U_m(a) \cap U_n(a) = L_m(a) \cap L_n(a) = \{a\}$
- すべての $a, b \in X$ が、 $\leq_1$, $\leq_2$, $\leq_3$ いずれかの順序で比較可能である。
- $(X, *_1, *_2, *_3)$ はトリスである。

ここで、さらに $m, n \in \{1,2,3\}$ $(m \neq n)$ に対して $U_m(a)$ と $L_n(a)$ との2つの共通部分が常に半直線である場合を秩序トリス **(methodical trice)** と呼ぶことにする。その半直線は t_m と t_n を結んだ直線と平行である。

1.4 ファジィ集合 について

X を通常の集合として、I を実数 R の部分集合の $[0,1]$ 区間とする。

Definition 2 X から I への関数を X 上のファジィ（部分）集合 (fuzzy (sub)set) と呼ぶ。このときの関数の値域（この場合は I）を真理値と呼ぶ。X 上のファジィ集合全体を I^X とする。
ファジィ理論では（数学的には分かりにくいが） X 上の ファジィ集合 A を

$$A = \{\langle x,\ \mu_A(x)\rangle\ :\ x \in X\}$$

と書くこともある。この μ_A は X から I への関数であって、$\mu_A(x)$ は x の A に属する度合（存在度）と考える。

関数であるファジィ集合の集まりに、集合の概念（和集合、積集合、補集合、空集合等）を模倣して導入にたものがファジィ理論の始まりである。集合演算などは次のように定義された。 $A, B \in I^X$ として、

$$\begin{array}{lll}
(a) & A \subseteq B & \text{iff } A(x) \leq B(x) \ \ (x \in X) \\
(b) & A = B & \text{iff } A \subseteq B \text{ and } B \subseteq A \\
(c) & A^c & \text{iff } A^c(x) = 1 - A(x) \ \ (x \in X) \\
(d) & A \cap B & \text{iff } A \cap B = A(x) \wedge B(x) \ \ (x \in X) \\
(e) & A \cup B & \text{iff } A \cup B = A(x) \vee B(x) \ \ (x \in X)
\end{array}$$

代数的に通常の集合の集まりはブール代数であるといえるが、ファジィ集合の集まりは少し弱い束であるとされる。場合よって多少異なる理論を考えられているが、集合の概念の模倣をする建て前から束から逸脱することは少ない。真理値が I のファジィ集合の場合、この他の演算を実数 R 上の演算 $(+$など$)$ を利用して定義され実際の分野に応用されている。 ファジィ集合の真理値の I をもっと一般的な束 L に変更した概念が L-ファジィ集合である。

1.5 直観ファジィ集合 intuitionistic fuzzy set

2つの真理値をもつファジィ集合も考えられた。片方の値は属す度合、もう片方の値は属しない度合と考え、その2つの値の和を1以下とした。2つの真理値の合計が必ず1になるというわけではないことを「排中律が成立していない」と解釈して、直観ファジィ集合と呼ばれることになった。

Definition 3 X 上の **直観ファジィ集合 (intuitionistic fuzzy set)** A とは、

$$A = \{\langle x,\ \mu_A(x),\ \nu_A(x)\rangle\ :\ x \in X\}$$

の形のものである。ここで μ_A と ν_A は X から I への関数であって、$x \in X$ に対して $\mu_A(x)$ は x の A に属する度合（存在度）$\nu_A(x)$ は x の A に属しない度合（非存在度）と呼ばれ、 $0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1$ を満たしているものとする。

$IF(X)$ で直観ファジィ集合の全体を表すとする。

Definition 4 $A = \{\langle x,\ \mu_A(x),\ \nu_A(x)\rangle\ :\ x \in X\}$ と $B = \{\langle x,\ \mu_B(x),\ \nu_B(x)\rangle\ :\ x \in X\}$ を直観ファジィ集合とする。次のように関係と演算を定義する。

$$
\begin{array}{ll}
(a) & A \subseteq B \ \text{ iff } \ \mu_A(x) \le \mu_B(x) \text{ and } \nu_B(x) \le \nu_A(x) \\
(b) & A = B \ \text{ iff } \ A \subseteq B \text{ and } B \subseteq A \\
(c) & A^c = \{\langle x,\ \nu_A(x),\ \mu_A(x)\rangle\ :\ x \in X\} \\
(d) & A \cap B = \{\langle x, \mu_A(x) \wedge \mu_B(x), \nu_A(x) \vee \nu_B(x)\rangle : x \in X\} \\
(e) & A \cup B = \{\langle x, \mu_A(x) \vee \mu_B(x), \nu_A(x) \wedge \nu_B(x)\rangle : x \in X\} \\
(f) & [\,]\, A = \{\langle x,\ \mu_A(x),\ 1 - \mu_A(x)\rangle\ :\ x \in X\} \\
(g) & \langle\,\rangle\, A = \{\langle x,\ 1 - \nu_A(x),\ \nu_A(x)\rangle\ :\ x \in X\}
\end{array}
$$

$(IF(X),\ \subseteq)$ は、順序集合であり、それから束を導くと $\cap$, $\cup$ は その束の $\wedge$, $\vee$ である。また、^{c} は順序反転対合である。結局、本質は順序の $\subseteq$ である。$[\,]$ は必要性演算子、$\langle\,\rangle$ は可能性演算子と呼ばれる。あわせて様相演算子と呼ばれる。なお、この他の演算である代数積や代数和もファジィ集合と同様に直観ファジィ集合にも定義されている。

2 直観ファジィ集合の再構成

我々は、本質的に何も変更しなくて、直観ファジィ集合を数学の立場から簡単で見やすくすることを試みる。まず、直観ファジィ集合は区間値ファジィ集合と同じであるとみなされている。区間ファジィ集合とは真理値が区間であるファジィ集合でる。真理関数は 1 つになったが、値域が区間である。応用としての意味があるが、この詳細は省略する。さらに考えると「直観ファジィ集合は L ファジィ集合の一種である」と言える。ここではこれを説明する。
まず、$I \times I$ の半分の領域、具体的に $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ の三つの点を頂点とする三角形の領域を考える。

$$L_I = \{(t_1, t_2) \in I \times I : 0 \le t_1 \le 1,\ 0 \le t_2 \le 1 \text{ and } t_2 \le t_1\}.$$

この L_I に次の順序を導入する。(t_1, t_2), $(s_1, s_2) \in L_I$ に対して、

$$(t_1, t_2) \le (s_1, s_2) \iff t_1 \le s_1 \ \text{ and } \ t_2 \le s_2$$

次に、$IF(X)$ から L_I^X への関数 f を 以下で定義する。

$$f(\{\langle x, \mu_A(x), \nu_A(x)\rangle : x \in X\})(x) = (1 - \nu_A(x), \mu_A(x))$$

このとき、$(IF(X),\ \subseteq)$ と $(L_I^X,\ \le)$ は同型である。さらに L_I の上の否定演算 ^{c} を

$$(t_1, t_2)^c = (1 - t_2, 1 - t_1) \ \text{ for } \ (t_1, t_2) \in L_I$$

で定義しておけば、$IF(X)$ の上の ^{c} と対応する。以上から直観ファジィ集合はこの簡単な L-ファジィ集合とみなせた。なお、L_I では $(1,1)$ が最大値で $(0,0)$ が最小値である。$O = (0,0)$, $I = (1,1)$ と略記することにする。また $H = (1,0)$ と書くことにする。

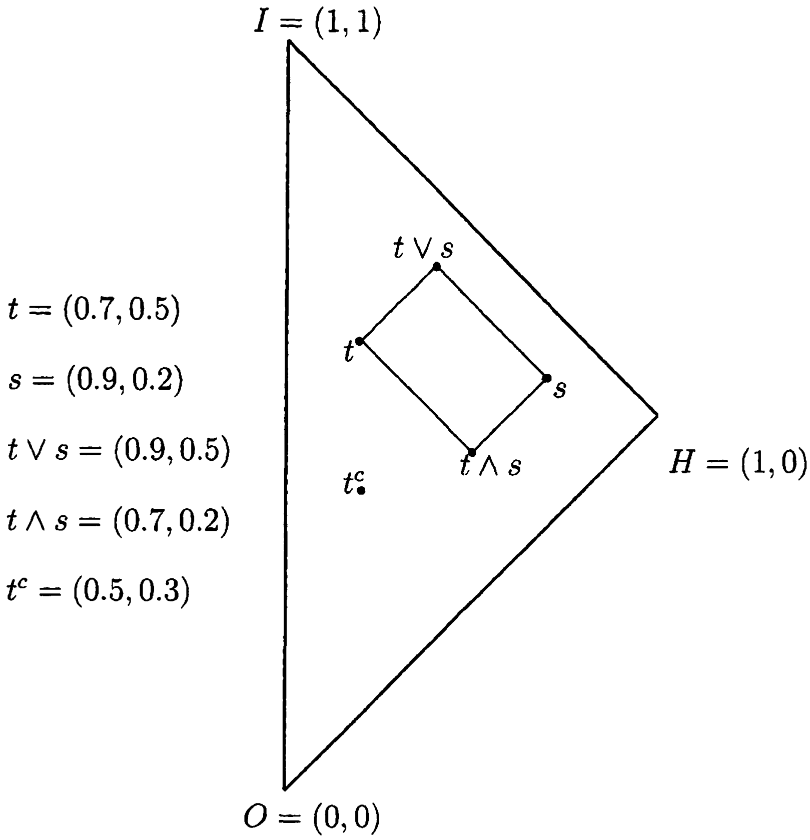

Figure 1: L_I の上の束演算の数値例

3　トリスファジィ集合　Trice fuzzy set

3.1　トリスとしての L_I

前節の L_I に自然な秩序トリスを導入することができる。まず、3 つの順序を導入しよう。

$$t \leq_1 s \iff t_1 \leq s_1 \text{ and } t_1 - t_2 \leq s_1 - s_2 \tag{9}$$
$$t \leq_2 s \iff t_2 \leq s_2 \text{ and } t_1 - t_2 \leq s_1 - s_2 \tag{10}$$
$$t \leq_3 s \iff t_1 \leq s_1 \text{ and } t_2 \leq s_2. \tag{11}$$

for $t = (t_1, t_2)$, $s = (s_1, s_2) \in L_I$. これらの順序 $\leq_1$, $\leq_2$, $\leq_3$ から、それぞれ半束演算を構成して $*_1$, $*_2$, $*_3$ とする。

Proposition 3　$(L_I, *_1, *_2, *_3)$ は秩序トリスである。

Proof　定義より明らか。なお、$*_1$, $*_2$, $*_3$ のおのおのの最大元は I, O, H である。

さて、ここで次のことがわかる。

Proposition 4　L_I の上の直観ファジィ集合に関する束の演算 $\vee$, $\wedge$, ${}^c(not)$ が、トリスの演算 $*_1$, $*_2$,$*_3$ を組み合わせて構成できる。

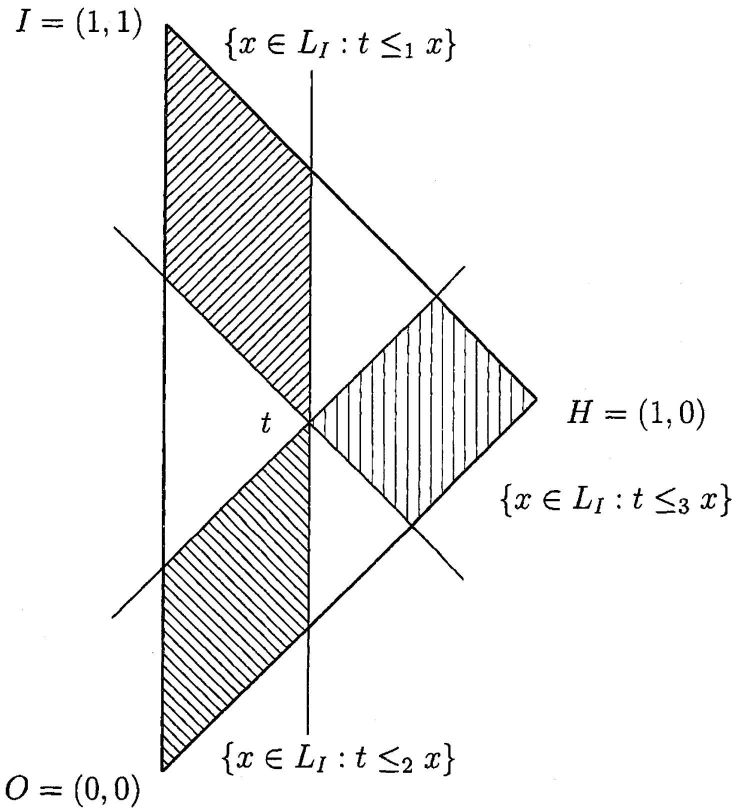

Figure 2: 3つの順序で t より大きい領域 L_I

Proof 具体的に構成して示す。

$$t \vee s = ((t *_1 s) *_3 t) *_1 ((t *_1 s) *_3 s) \tag{12}$$
$$t \wedge s = ((t *_2 s) *_3 t) *_2 ((t *_2 s) *_3 s) \tag{13}$$
$$t^c = (t *_3 (t *_1 H)) *_2 H *_1 (t *_2 H). \tag{14}$$

Proposition 4 の逆は成り立たない。つまり束演算からトリス演算は構成できない。

L_I の上の直観ファジィ集合に関する様相演算子 もトリスの演算 $*_1$, $*_2$,$*_3$ を組み合わせて構成できる。

$$[\,]\, t = t *_2 I \tag{15}$$
$$\langle\,\rangle\, t = t *_1 O \tag{16}$$
$$\tag{17}$$

なお、次のことも注意しておく。

$$t = [\,]\, t *_3 \langle\,\rangle\, t \tag{18}$$

$(L_I, *_1, *_2, *_3)$ は、直観ファジィ集合の概念を本質的に含んでいると考えてよい。しかし、L_I の上に秩序トリスを導入した効用はこれだけではない。

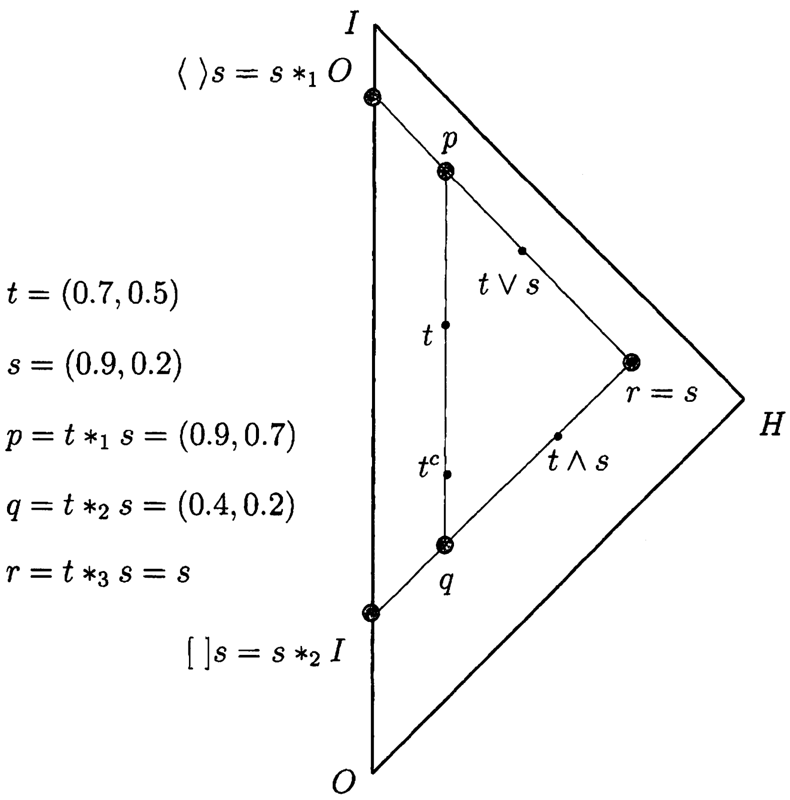

Figure 3: L_I の上のトリス演算の数値例

3.2 L_I の上の 和 addition について

実数 R の概念には、普通の足し算（算術和）+ が先天的に入っている。しかし、R の + は、束の演算の $\wedge$(min) と $\vee$(max) から構成することなどできない。+ は別建てで導入されることになる。束の演算は算術和とは独立している。
ファジィ集合の真理値を I にしたとき I は単なる順序数ではない。実際、ファジィ理論に算術和 + が意識され応用として使われている。I に R の + をそのまま I に導入しても閉じていないから幾分工夫されている。いろいろ考えられるのだが、ここではもっとも単純に 1 を超えたら 1 とする演算 $\ominus$ を考える。次の $\odot$ は $\ominus$ の双対の演算である。
I の上の演算 $\oplus$ と $\odot$ を次で定義する。 $a, b \in I$ に対して、

$$a \oplus b = (a + b) \wedge 1 \tag{19}$$
$$a \odot b = (a + b - 1) \vee 0 \tag{20}$$

$\odot$ は 限界和 (bounded sum) と呼ばれている。これを L_I に拡張する。
L_I の上の演算 $\oplus$ と $\odot$ を次で定義する。 $t = (t_1, t_2)$, $s = (s_1, s_2) \in L_I$ に対して、

$$t \oplus s = ((t_1 + s_1) \wedge 1,\ (t_2 + s_2) \wedge 1) \tag{21}$$
$$t \odot s = ((t_1 + s_1 - 1) \vee 0,\ (t_2 + s_2 - 1) \vee 0) \tag{22}$$

$t \oplus s$ は t と s が O に近いとき O を原点としたベクトルの和のような演算である。
$t \odot s$ は I を原点としたベクトル和のような演算である。

R の $+$ が $\wedge$(min) と $\vee$(max) から構成できないのと同じように L_I の $\oplus$, $\odot$ は L_I の $\wedge$, $\vee$, ^{c} から構成することはできない。ところが、次の命題が成立する。

Proposition 5 L_I の上の演算 $\oplus$, $\odot$ は L_I のトリスの演算 $*_1$, $*_2$,$*_3$ を組み合わせて構成できる。

Proof 最初に t, s が O と I の線分上にある場合を考える。つまり、$t = (t,t)$, $s = (s,s)$ である。実際このとき

$$t \oplus s = (t^c *_3 (s \wedge t^c) *_2 H *_1 O)^c \tag{23}$$
$$t \odot s = (t^c \oplus s^c)^c \tag{24}$$

となる。既に ^{c}, $\wedge$ は、$*_1$, $*_2$,$*_3$ で構成できることが示されている。
次に $t, s \in L_I$ に対して 定義から

$$[\,]\,(t \oplus s) = [\,]\,t \oplus [\,]\,s \text{ and}$$
$$\langle\,\rangle\,(t \oplus s) = \langle\,\rangle\,t \oplus \langle\,\rangle\,s$$

である。よって、

$$\begin{aligned} t \oplus s &= ([\,]\,(t \oplus s)) \ *_3 \ (\langle\,\rangle\,(t \oplus s)) \\ &= ([\,]\,t \oplus [\,]\,s) *_3 (\langle\,\rangle\,t \oplus \langle\,\rangle\,s)) \end{aligned}$$

すべての $t \in L_I$ に対して $[\,]\,t$, $\langle\,\rangle\,t$ が O と I の線分上にあるから、$t \oplus s$ は $*_1$, $*_2$, $*_3$ を組み合わせて構成できる。$t \odot s$ については（直接同様の方法によってでも証明できるが）$t \oplus s$ に (24) を使って構成できる。
証明終わり

この命題によって、トリス $(L_I, *_1, *_2, *_3)$ から束論的演算ばかりでなく、和演算 $\oplus$ も構成できた。ファジィ理論の真理値では、束の演算と和算もあることが応用上面白いと思われる。よって、トリスはファジィ理論の真理値に都合の良い代数系であると解釈できる。

3.3 トリスTファジィ集合 と トリスファジィ集合 の定義

今後のために トリスファジィ集合と名前を付けて定義しておく。X を通常の集合として、$T(*_1, *_2, *_3)$ をトリスとする。

Definition 5 X から T への関数を X 上の**トリスTファジィ（部分）集合 (trice T fuzzy (sub)set)** と呼ぶ。トリス T ファジィ集合の全体を T^X と書く。とくに、T が上で定義された秩序トリス L_I のとき、単に **トリスファジィ集合 (trice fuzzy set)** と呼ぶ。

References

[1] K. Atanassov, "Intuitionistic fuzzy set," *Fuzzy sets and Systems.* vol. 20, pp. 87–96, 1986.

[2] K. Atanassov, *Intuitionistic fuzzy sets: Theory and Applications (Studies in Fuzziness and Soft Computing Vol.35)*, Physica-Verlag, 1999.

[3] D. Çoker, "An introduction to intuitionistic fuzzy topological spaces," *Fuzzy sets and Systems.* vol. 88, pp. 81–89, 1997.

[4] S. Burris, H.P.Sankappanavar, *A Course in Universal Algebra*, GTM 78 Springer-Verlag, 1981.

[5] G. Birkhoff, *Lattice Theory (third ed.)* Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1967.

[6] G. Grätzer. *General Lattice Theory (Second ed.)* Birkhäuser, 1998.

[7] J. Goguen, "L-fuzzy Sets." J. Mathematical Analysis and Applications, vol. 18, no.1, pp. 145–174, 1967.

[8] K. Horiuchi, "Trice and Two delegates operation," Scientiae Mathematicae, vol. 2, no. 3 pp. 373–384, 1999.

[9] K. Horiuchi, A. Tepavčević, "On distributive trices." Discussiones Mathematicae General Algebra and Applications, vol pp. 21, 21–29, 2001.

[10] K. Horiuchi, "Some weak laws on bisemilattice and triple-semilattice." Scientiae Mathematicae, vol 59, no.1, pp. 41–61, 2004.

[11] L. A. Zadeh. "Fuzzy Sets." Information and Control, vol. 8 pp. 338–353, 1965.